Platonismo matemático sin metafísica: nuevas luces sobre la objetividad en Gottlob Frege y Kurt Gödel

Ricardo José Da Silva Araujo

Introducción

El realismo de corte platónico es una de las posturas en filosofía que mayor tradición y respaldo tiene, aunque no debemos negar que fue, es, y con toda certeza será, objeto de crítica y rechazo. El platonismo conlleva consigo toda una ganancia ontológica en tanto que puede suponer bajo su campo referencial no sólo objetos empíricos, es decir, objetos explicados en términos de coordenadas espaciales y temporales,[1] sino que también puede suponer la existencia de objetos abstractos,[2] y si consideramos

[1] Gracias a una sugerencia del jurado dictaminador modificamos nuestra forma de representar a los objetos espacio-temporales. Anteriormente asumíamos que los objetos espacio-temporales se pueden representar mediante un par ordenado de la siguiente manera: ((x, y, z), t). Donde la primera coordenada refiere a la ubicación espacial del objeto (debemos observar que la primera coordenada es de hecho un trío ordenado cuyas coordenadas son números reales asociados a las coordenadas de un plano cartesiano de tres dimensiones), y la segunda coordenada se refiere a la posición del objeto en la flecha del tiempo. La recomendación es que la anterior definición puede ser complicada y de hecho los objetos espacio-temporales pueden ser representados de manera más precisa como colecciones de coordenadas espacio-temporales que tiene alguna propiedad de conexión (topológica). Debemos agradecerle al maestro Carlos Romero (UNAM) por señalarnos las posibles fallas y debilidades teóricas de una definición como la primera: (1) La definición del objeto se vuelve dependiente de la geometría con la que estemos trabajando (en nuestro caso una geometría euclidiana de 4 dimensiones), (2) Se trata de una representación de un objeto en un espacio-tiempo clásico y no relativista (no siendo esto consistente con nuestro conocimiento del universo que de hecho es relativista) y (3) Se debe apostar por buscar una representación invariante (bajo transformación del constructo teórico que se asuma). También queremos agradecer al doctor Cristian Gutiérrez (UNAM) por recomendarnos el siguiente texto para profundizar en el estudio de la representación de los objetos materiales como colecciones de coordenadas: Peter Simons, *Parts. A Study In Ontology*. Oxford, Universidad de Oxford, 1987.

[2] Para una introducción al tema de los objetos abstractos, véase Rosen Gideon,

al realismo en matemática obtenemos como consecuencia que los enunciados de las teorías lógico-matemáticas tendrían una referencia propia.[3]

Según los lógicos, matemáticos y filósofos de la matemática que defienden una postura platonista, los objetos de la matemática son independientes de los estados mentales del sujeto y sus construcciones teóricas. Lo anterior implica, en principio, dos cosas. En primer lugar, los objetos matemáticos ni son creaciones ni son invenciones del sujeto matemático y, por lo tanto, el matemático actuará como alguien que descubre y no como un inventor y/o creador, así pues, la posición realista platónica presupone, por una parte, la objetividad del ente matemático, es decir, los números, figuras geométricas, sucesiones, conjuntos y funciones no son creaciones de la mente humana; y por otra parte, existe una separación entre el sujeto y el objeto, deduciéndose así que el objeto matemático no necesita del sujeto para existir, al contrario, la existencia del ente matemático es anterior a su relación con el sujeto, sus medios de definición y sus teorías formales. En segundo lugar, teniendo presente la independencia del objeto con respecto al sujeto que defiende el platonista y la tesis, según la cual los objetos matemáticos no poseen una ubicación en el espacio y el tiempo, se obtiene como consecuencia que las cualidades ontológicas de los entes matemáticos son distintas a la de los entes físicos, y, por lo tanto, los objetos de la matemática son incorpóreos, atemporales e inmutables. Estos cambios ontológicos producen también un cambio en la forma en que el sujeto se relaciona con el objeto, pues al no poseer las cualidades de los objetos físicos, los entes matemáticos no pueden ser aprehendidos por los sentidos y son, como defienden varios autores,[4] accesibles solamente por el intelecto.

Ahora bien, ¿cómo sabemos que la matemática y la lógica son objetivas? ¿Es suficiente con asumir un mundo platónico de los entes matemáticos para defender la validez de nuestras teorías lógico-matemáticas? Existen matemáticos y filósofos que creen que no, estos pensadores creen que es necesario explicar

"Abstract Objects", en Edward N. Zalta, ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, invierno, 2017), en https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/abstract-objects/. Rosen muestra los diversos criterios que a lo largo de la historia de la filosofía se han ofrecido para definir un objeto abstracto y en consecuencia poder distinguirlo de un objeto concreto. Cualquiera de estos criterios es coherente y amigable con el trabajo que aquí nos proponemos.

[3] En el caso general del realismo filosófico, la objetividad se explicaría de la siguiente manera, siguiendo a Dummet: "Caracterizo el realismo como la creencia de que los enunciados de la clase en disputa poseen un valor de verdad objetivo, independiente de nuestros medios para conocerlo: son verdaderos o falsos en virtud de una realidad que existe con independencia de nosotros" (Michael Dummett, "El realismo", en *La verdad y otros enigmas*. Trad. de Alfredo Herrera Patiño. México, FCE, 1990, p. 221).

[4] Estamos pensando aquí en Platón (427-347 a. C.), Georg Cantor (1845-1918), Gottlob Frege (1848-1925) y Kurt Gödel (1906-1978).

la objetividad en matemática desde otra perspectiva que no sea la de apelar a un *mundo platónico de las ideas* ni a una especie de *intuición intelectual*. Contemporáneamente tenemos dos casos de esta forma de proceder.

En primer lugar, encontramos a la filósofa estadounidense Penelope Maddy, quien propone un realismo de corte empírico o platonismo naturalizado.[5] La autora propone que los objetos de la matemática, en especial los de la teoría de conjuntos, son objetos perceptibles. Esta forma de proceder haría uso de ciertos elementos de psicología empírica, la fisiología y la neurología para explicar la forma en que el sujeto conoce al objeto matemático, sin tener que apelar al recurso de la *intuición intelectual*. Por otro lado, Maddy también recurre a una versión del *argumento de indispensabilidad*,[6] según la cual: "las confirmaciones empíricas de la teoría física confirman, simultáneamente, la existencia de las entidades matemáticas presupuestas (vía cuantificación) por la teoría matemática empleada en la teoría física".[7] En síntesis, Maddy trata de defender la objetividad en matemáticas sin apelar a los recursos metafísicos del platonismo en matemática tradicional.[8]

En segundo lugar, nos topamos con la postura del filósofo estadounidense Mark Balaguer, quien propone su platonismo pleno (*Plenitudinous platonism*) como forma de solucionar el *Dilema de Benacerraf*.[9] El principio articulador del platonismo pleno es que si una teoría matemática es consistente (posible), entonces existen los objetos sobre los que trata la teoría, ahora bien, para Balaguer este principio permite prescindir de la *intuición intelectual* como forma de conocimiento de los objetos matemáticos, pues lo único que tendríamos que hacer para conocerlos es pensarlos, conceptualizarlos o incluso inventarlos de manera consistente (libre de contradicción).

Ahora bien, nosotros creemos poder encontrar intentos de defender el platonismo en matemática sin acudir a los conceptos metafísicos clásicos del

[5] Este último es el nombre que ofrece Mark Balaguer sobre la postura de Maddy en su artículo: Mark Balaguer, "Platonismo pleno", en *Análisis Filosófico*. Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, vol. 14, núm. 2, 1994, p. 134.

[6] El *argumento de indispensabilidad* ha sido usado por muchos filósofos de la ciencia y de la matemática para defender una postura realista. Según el profesor Anastasio Alemán Pardo, se trata de un argumento defendido por eminentes filósofos como lo son Quine, Lakatos, Putman, Field y Resnik, pero es un argumento que también cuenta con detractores como Popper y Musgrave. Para una revisión del tema véase Anastasio Pardo, *Lógica, matemática y realidad*. Madrid, Tecnos, 2011, caps. 2 y 3.

[7] *Ibid.*, p. 92.

[8] Aquí presentamos brevemente lo que se puede considerar como la primera etapa del desarrollo filosófico de Penelope Maddy. Para el año 1997, la concepción filosófica de Maddy sobre la matemática cambió de una postura realista a una postura naturalista. Para una revisión del tema, véase Penelope Maddy, *Naturalism in Mathematics*. Oxford, Universidad de Oxford, 1997.

[9] *Cf*. M. Balaguer, "Platonismo pleno", en *op. cit.*, pp. 131-134.

mundo de las ideas e *intuición intelectual* en ciertos textos de dos autores canónicos de la lógica matemática y la filosofía de la matemática (y en especial, del realismo platónico en matemática), se trata pues, de Gottlob Frege y Kurt Gödel. Para nadie es un secreto que dichos autores han usado los recursos metafísicos antes citados (sobre todo en el caso de Gödel), pero nos ocuparemos en especial de las estrategias argumentativas que usan en algunas de sus obras para defender tal objetivismo sin acudir a los conceptos antes mencionados.[10] En el caso de Frege, en el prólogo a *Las leyes fundamentales de la aritmética*,[11] ofrece una reflexión sobre lo que consideramos *real* y *objetivo* que lo lleva a dividir el campo ontológico en tres dominios: lo subjetivo (la representación mental), lo objetivo real (el objeto empírico) y lo objetivo no-real (en donde se encuentran los números, conjuntos y funciones). Mientras que Gödel por su parte presenta una defensa alterna del realismo platónico en sus textos inéditos[12] que se apoya en su *Primer teorema de incompletitud* (1931)[13] para defender la objetividad del ente matemático y la validez sobre su conocimiento.

El caso Frege: la distinción entre lo real y lo objetivo

Gottlob Frege, en "Función y concepto",[14] presenta una crítica contra la tendencia filosófica del momento, ni más ni menos, que el psicologismo que se había heredado del idealismo alemán de los siglos XVII y XVIII.[15] Tal tendencia filosófica asumía que no se podía tomar por objeto aquello que no fuese percibido por los sentidos, es decir, todo aquello que no cae dentro del alcance de

[10] Podemos considerar a estas estrategias como alternas a la defensa canónica del objetivismo dentro del platonismo clásico en matemática.

[11] *Cf.* Gottlob Frege, "Prólogo a las *Leyes fundamentales de la aritmética*", en *Estudios sobre semántica*. Barcelona, Folio, 2002, pp. 129-163.

[12] *Cf.* Kurt Gödel, "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas (1951)", en Francisco Rodríguez Consuegra, ed., *Ensayos inéditos*. Pról. de W. V. Quine. Barcelona, Mondadori, 1994, pp. 149-169.

[13] *Cf.* K. Gödel, "Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines", en Jesús Mosterín, ed., *Kurt Gödel. Obras completas*. Madrid, Alianza, 2006, pp. 53-87.

[14] *Cf.* G. Frege, "Función y concepto", en *op. cit.*, pp. 17-48.

[15] Siguiendo a Michael Dummett tenemos que: "Frege lanzó un fuerte ataque contra lo que él llamaba el 'psicologismo' —la tesis según la cual la explicación del significado de las palabras debe darse en términos de los procesos mentales que ocurren en el hablante o en el oyente, o que están implicados en la adquisición de una comprensión de su sentido (o la tesis más fuerte de que estos procesos mentales son a lo que nos estamos refiriendo cuando usamos las palabras)" (M. Dummett, "La filosofía de Frege", en *La verdad y otros enigmas*, p. 158).

nuestro aparataje perceptivo-sensorial no podría considerársele objeto, y por consecuencia, tampoco real. Esta concepción conlleva a asumir a los signos numéricos como los objetos de estudio de la matemática, esto es, a la pregunta por cuáles son los objetos sobre los que versan los teoremas matemáticos debemos, según el psicologista, señalar al signo numérico, puesto que éste puede percibirse, ya sea mediante la vista o el oído.

Pero como bien nos señala Frege, este punto de vista conlleva a la consecuencia de que la expresión numérica "6" y la expresión "2 + 4" significarían cosas distintas, ya que tienen propiedades diferentes, incluso repeticiones de un mismo signo numérico sobre un pizarrón tendrían propiedades distintas (diferentes dimensiones en la grafía, distinto color, etcétera). Los signos numéricos tienen propiedades físicas y químicas que dependen de los medios físicos mediante los cuales los reproducimos, pero en ninguna investigación experimental sobre esos medios encontraremos las propiedades comunes de los números, como, por ejemplo, que todo número multiplicado por cero es igual a cero, o que todo número, sea positivo o negativo, elevado al cuadrado tiene como resultado un número positivo. La propuesta del padre de la lógica matemática para solucionar todos estos problemas, incluido el problema de la identidad entre expresiones numéricas distintas, es distinguir entre el contenido de dichas expresiones y las expresiones mismas. Distintas expresiones pueden tener una misma referencia, aunque se formulen o presenten de maneras diferentes. En palabras del autor:

> Así, pues, si hay que distinguir los signos numéricos de aquello a que se refieren, también habrá que reconocer la mismas referencias a las expresiones "2", "1 + 1", "3 – 1", "6 : 3", pues no podemos alcanzar a comprender en qué radicaría la diferencia. Quizá se diga: 1 + 1 es una suma, pero 6 : 3 es un cociente. ¿Pero qué es 6 : 3? El número que multiplicado por 3 da 6. Se dice "el número", no "un número"; con el artículo determinado se señala que sólo hay un único número. Ahora bien, resulta que (1 + 1) + (1 + 1) + (1 +1) = 6, y por lo tanto (1 + 1) es precisamente el número que se designó por (6 : 3), las diferentes expresiones corresponden a diversas consideraciones y aspectos, pero no obstante, siempre a la misma cosa.[16]

Aquí Frege empieza a generar una proto-distinción semántica, que se verá más claro en "Sobre sentido y referencia"[17] y que funcionará para llevar a cabo su distinción ontológica tardía. Se muestra así un triángulo amoroso entre el

[16] G. Frege, "Función y concepto", en *op. cit.*, pp. 21-22.
[17] *Cf.* G. Frege, "Sobre sentido y referencia", en *op. cit.*, pp. 51-86.

lenguaje, en donde aparecen las expresiones u objetos lingüístico; el mundo, en el sentido más general posible, en donde se ubican las referencias de las expresiones lingüísticas; y un tercer nivel o ángulo, que es la forma en que tales expresiones nos presentan a su referencia, el nivel del sentido.

Así, llegamos tarde o temprano al famoso artículo "Sobre sentido y referencia", la torre de apoyo central de toda la filosofía del lenguaje contemporánea. En dicho artículo encontramos reflexiones como la siguiente: "Es natural considerar entonces que a un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la referencia del signo, va unido a lo que yo quisiera denominar el sentido del signo, en el cual se halla contenido el modo de darse".[18]

Queda ahora mejor iluminada la relación entre el signo, la referencia y el sentido, su relación es tal que a una determinada expresión E, le corresponde un determinado sentido S y, a su vez, a ese sentido S le corresponde un determinado objeto R que funciona como su referencia. En cambio, si consideramos el plano óntico, el de la referencia, entonces a un determinado objeto no le corresponde una única expresión que lo nombre o señale, esto es, una referencia R puede venir señalada por dos expresiones, E_1 y E_2, y cada una de estas expresiones estará asociada a un sentido (S_1 y S_2, respectivamente). También debemos señalar, como lo hizo el lógico de la Universidad de Jena, que no a todo sentido se le puede asociar una referencia, por ejemplo, las expresiones "El último número natural" o "El hombre de 500 años de edad con vida presente en este lugar" tienen un sentido, aunque no tienen una referencia, no caracterizan un objeto.

Ahora bien, nos dice Frege que "de la referencia y del sentido de un signo hay que distinguir la representación que a él va asociada".[19] Si no tenemos cuidado en separar el sentido y la referencia de la representación mental podemos caer en peligrosos problemas, pasando así de un triángulo amoroso semántico a un cuadrado paranoico psicológico. Supongamos un signo cuya referencia sea un objeto que cae dentro del alcance de nuestro aparataje perceptivo-sensorial, así pues, un objeto explicado en términos de coordenadas espacio-temporales. La representación asociada a dicho signo es lo que Frege llama una *imagen interna*, es decir, una imagen mental, producto tanto de las impresiones del objeto sobre los sentidos del sujeto así como de su *vida interna*, esto es, sus estados mentales y anímicos. La referencia es objetiva, no depende del sujeto para existir, mientras que la representación subjetiva necesita del sujeto para existir, la representación sólo existe en el sujeto y no fuera de éste o sin la ayuda de éste. El objeto, o la referencia, puede ser considerado *público* en el

[18] *Ibid.*, p. 53.
[19] *Ibid.*, p. 56.

sentido de que es en principio perceptible por todos, en cambio la representación asociada a dicho objeto es privada, la representación de una persona no es, ni puede ser la de otra persona.

Pero no es en "Sentido y referencia" en donde podemos hablar de una distinción ontológica concienzuda y además una defensa del ente matemático como siendo objetivo. Es en el prólogo a las *Leyes fundamentales de la aritmética* donde aparece el *objetivismo* de Frege de manera marcada. En tal prólogo, el autor reconoce que los psicologistas pretenden defender una identidad entre lo real y lo que es percibido por los sentidos, dicha identidad lleva a asumir a los signos numéricos como los números, y, por lo tanto, como siendo los verdaderos objetos de estudio de la matemática.

Los psicologistas asumen que lo que no es percibido por los sentidos es subjetivo, creándose así una dicotomía ontológica entre lo objetivo (lo que es perceptible) y lo subjetivo (lo que no es perceptible). La solución de Frege es defender que existen cosas objetivas que son reales y cosas objetivas que no lo son, es decir, la objetividad no se agota en "ser real" o "ser percibido". De esta manera, Frege evita el empirismo radical que tiene sus raíces en Mill o el relativismo al que conlleva la posición psicologista. Negando que los signos numéricos sean los números u objetos de estudio de la aritmética, queda la posibilidad de considerar que los objetos matemáticos son subjetivos o representaciones mentales. Pero si el objeto matemático es subjetivo, nadie tiene la potestad para asegurar que "uno por uno es igual a uno", puesto que el "uno" de una persona, no tiene que poseer las mismas propiedades que el "uno" de otro sujeto. En palabras del lógico de Jena:

> Si no pudiéramos concebir más que lo que está en nosotros mismos, sería imposible una lucha de opiniones, una comprensión mutua, porque faltaría el terreno común, y éste no puede ser ninguna representación en el sentido de la psicología. No habría nada parecido a la lógica, que estuviera encargado de arbitrar en la lucha de opiniones.[20]

De esta manera, sólo es posible hacer ciencia si tenemos un terreno común que sea accesible a todos, y la forma de asegurar en matemática este terreno común es separando la objetividad de la realidad, y aceptando que lo no perceptible no se reduce únicamente a lo subjetivo. Es así como Frege da lugar a la objetividad en matemáticas sin apelar a recursos oscuramente metafísicos como los de *intuición intelectual* o *mundo de las ideas*.

[20] G. Frege, "Prólogo a las *Leyes fundamentales de la aritmética*", en *op. cit.*, p. 153.

Esta triple distinción llega a su pináculo en el escrito póstumo "El pensamiento. Una investigación lógica".[21] Pero en "El pensamiento..." se deja de hablar de planos de objetividad, para pasar a hablar de "mundos", haciendo reminiscencia a la teoría original de Platón. Frege habla en su escrito póstumo que los sentidos, a los que aquí llama *pensamiento*, son distintos de las cosas del mundo exterior, puesto que éstos no pueden ser percibidos por nuestro aparataje perceptivo-sensorial, pero también son distintos del mundo interior, puesto que las representaciones necesitan de un portador, mientras que los objetos de la matemática no necesitan de un portador o de alguien que los piense para existir. Aparece así un tercer mundo o tercera esfera:

> Lo que a ella pertenece coincide con las representaciones en que no puede ser percibida por los sentidos, y con los objetos, en que no necesita de un portador a cuyos contenidos de conciencia pertenezca. Así, por ejemplo, el pensamiento que pronunciamos en el teorema de Pitágoras es atemporalmente verdadero, es verdadero con independencia de si alguien lo considera verdadero. No necesita de un portador. Es verdadero no solamente desde que ha sido descubierto, así como un planeta ya ha estado en acción recíproca con otros planetas aun antes de que alguien lo haya visto.[22]

El caso Gödel: el argumento del creador

Ante la limitación que supone el bien conocido *Teorema de incompletitud* para el logicismo y formalismo, y no contento con el reduccionismo que proponía en la matemática clásica la filosofía intuicionista, Kurt Gödel aboga por un realismo platónico como única filosofía satisfactoria para dar respuesta a los problemas metodológicos, ontológicos y epistemológicos que genera la matemática.

Para abordar la perspectiva filosófica de dicho autor haremos uso de un esquema que está inspirado en la presentación de las tres grandes áreas filosóficas del realismo gödeliano que lleva a cabo el profesor Francisco Rodríguez Consuegra usando como base el artículo póstumo de Gödel titulado "¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?"[23] Este esquema que se presenta, trata de dar cuenta de la segunda y sexta versión de dicho material y de los argumentos

[21] *Cf*. G. Frege, "El pensamiento, una investigación lógica", en Valdés Villanueva, comp., *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Madrid, Tecnos, 1998.

[22] *Ibid*., p. 148.

[23] *Cf*. K. Gödel, "¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?, II (1953- 1954?)" y "¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?", en F. Rodríguez Consuegra, ed., *op. cit*., caps. 6 y 7.

filosóficos que Gödel ofrece en otros lugares.[24] Se trata de un esquema que captura la interpretación tradicional del realismo platónico gödeliano, aunque como mostraremos después, hay una defensa alterna del objetivismo matemático expuesta por el propio autor que no recurre a planteamientos como el de la existencia de un mundo platónico de entes abstractos, en particular los objetos matemáticos, ni de la *intuición intelectual* como solución al problema epistemológico de la accesibilidad al objeto matemático. El esquema es el siguiente:

1. Ontología: los objetos matemáticos existen con independencia del sujeto que los describe. Su realidad posee cierto grado de similitudes a la realidad que poseen los objetos espacio-temporales. Se trata de una postura contrapuesta a la empirista, la intuicionista y la formalista radical.
2. Semántica: los axiomas de la matemática no se encuentran vacíos de contenido, éstos se refieren a los objetos matemáticos.
3. Epistemología: el hombre está en poder de una *intuición intelectual* que le permite conocer los objetos y axiomas matemáticos. Esta intuición se explica desde un paralelismo con la percepción sensible.

Gödel establece una similitud entre las ciencias físico-naturales y la matemática que le ayuda a argumentar a favor de la existencia de los objetos matemáticos, en "La lógica matemática de Russell" asegura que los conjuntos y conceptos deben entenderse como independientes de nuestras construcciones teóricas y nuestras definiciones.[25] Los conjuntos deben verse como estructuras que consisten en una pluralidad de cosas y los conceptos como propiedades de dichas cosas. Así pues, la existencia de los conceptos y conjuntos debe ser tan legítima como la aceptación de cuerpos físicos, pues así como los objetos físicos son necesarios para el desarrollo de una teoría de nuestras percepciones sensibles, de igual manera los objetos matemáticos "son necesarios para obtener un sistema de matemáticas satisfactorio".[26] Esto quiere decir que es imposible admitir la matemática como una ciencia sin contenido, como admitirían los formalistas más radicales.[27]

De esta manera, para Gödel, la matemática sólo tiene sentido, y por tanto es importante, si posee contenido, es como nos dice Ignacio Jane, si no se

[24] Hablamos de tres artículos en específico que son: "La lógica matemática de Russell" de 1944, "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?" de 1947 y "Suplemento a ¿Qué es el problema del continuo de Cantor?" de 1964, todos en J. Mosterín, ed., *Kurt Gödel. Obras completas*.

[25] *Cf*. K. Gödel, "La lógica matemática de Russell", en J. Mosterín, ed., *op. cit*., p. 326.

[26] *Idem*.

[27] Piénsese en J. Thomae quien sostuvo que en la matemática pura no se necesita ir más allá del simbolismo y las reglas de manipulación de tal simbolismo.

asume la posición realista de la existencia de los entes matemáticos entonces "no es posible dar cuenta de nuestras teorías [...]"[28]

Ahora bien, si postulamos de esta manera la existencia de los objetos matemáticos, caemos en el gran problema de cómo los conocemos, pues no se les puede conocer por vía sensorial. La solución de Gödel es que estamos en poder de una intuición especializada que nos permite conocer dichos objetos y, por ende, el conocimiento matemático es *apriorístico*. Así pues, nuestro autor comenta que a pesar de que no podemos tener una conexión experimental con los objetos matemáticos, existe una especie de "percepción" de los objetos matemáticos, que sólo puede ser explicada por medio de la *intuición matemática*. Tal intuición es la que nos "fuerza" a reconocer a los axiomas como verdaderos y refiriéndose a un contenido. Para nuestro autor, tanto la *percepción empírica* como la *intuición matemática* son ambas formas en que el hombre conoce, la diferencia que se puede encontrar entre ellas es que la primera relaciona conceptos y objetos, como cuando predicamos color, tamaño y forma sobre cosas que están en el mundo, mientras que la segunda relaciona conceptos u objetos ideales,[29] y podemos poner como ejemplo las reglas de inferencia de la lógica.

Para nuestro autor, la intuición matemática no sólo se presenta como una solución epistemológica al problema del conocimiento matemático, sino que es gracias a tal intuición que sabemos como verdaderos a ciertos axiomas matemáticos y lógicos,[30] y esto nos permite la búsqueda de nuevos axiomas para la solución de preguntas sin respuestas dentro de nuestras teorías formales.

Esta interpretación sobre el platonismo gödeliano se puede ejemplificar con un caso concreto, la posición filosófica del autor ante el problema de la *hipótesis del continuo de Cantor.*

Si recordamos nuestros años de infancia cuando nos enseñaban los números naturales, nos decían que estos servían para contar elementos, el numeral 1 servía para contar un elemento, el 2 para decir que había dos elementos, el 3 para decir que contábamos con tres elementos y así sucesivamente, es decir, los números cardinales 0, 1, 2, 3, 4, etcétera, sirven para medir cuántos elementos tiene un conjunto, dicho de forma más técnica, sirven para medir la cardinalidad de un conjunto, pero estos números sólo sirven para medir la cardinalidad de conjuntos finitos.[31] Desde Cantor sabemos que ya podemos

[28] Ignacio Jane, "¿De qué trata la teoría de conjuntos?", en R. Orayen y M. Moretti, eds., *Filosofía de la lógica*. Madrid, Trotta, 2004, p. 265.

[29] *Cf.* K. Gödel, "¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?", en F. Rodríguez Consuegra, ed., *op. cit.*, p. 203.

[30] *Ibid.*, p. 201. Gödel propone el caso del *modus ponens* y el principio de inducción matemática.

[31] El tema sobre si aprendemos los números a partir del concepto de cardinal no se

medir cuantos elementos tiene un conjunto infinito, pues contamos con los números cardinales transfinitos $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, etcétera, donde $\aleph_0$ es la cardinalidad del conjunto de los números naturales o de cualquier conjunto que sea numerable.[32]

Cantor había probado que el cardinal del conjunto de los números reales es estrictamente mayor que el cardinal del conjunto de los números naturales, el problema ahora era conseguir el cardinal que midiese la cantidad de elementos que tenía el conjunto de los reales, este cardinal resultaba ser $2^{\aleph_0}$, y Cantor conjeturó que como el cardinal inmediatamente mayor que le seguía a $\aleph_0$ era $\aleph_1$, entonces $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

En caso de que la identidad anterior sea cierta, tenemos como consecuencia que no existe un cardinal intermedio entre el cardinal de los números naturales y el cardinal de los números reales, a dicha identidad se le conoce como la ***hipótesis del continuo*** (HC), y se puede entender como la conjetura que dice que "cualquier conjunto infinito de números reales o es enumerable o tiene ya la cardinalidad del continuo".[33] Por la ***hipótesis generalizada del continuo*** (HGC) se entiende precisamente una generalidad de la conjetura anterior, la cual enuncia que para cualquier conjunto infinito A se tiene que entre la cardinalidad de A y la cardinalidad del conjunto potencia de A, no existe una cardinalidad intermedia.[34]

Ahora bien, Gödel demostró[35] en 1939 que la HC no puede refutarse a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos (en términos más formales demostró que ZFC $\nvdash |\mathbb{R}| \neq \aleph_1$), dicho de otra forma, no podía derivarse la negación de HC

encuentra libre de discusión. Un artículo clásico que inicia la crítica a la concepción conjuntista de los números es Paul Benacerraf, "What numbers could not be", en P. Benacerraf y Hillary Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics. Selected Reading*. 2a. ed. Cambridge, Universidad de Cambridge, 1983, pp. 272-294. En clave más didáctica se recomienda la lectura de Juan Godino *et al.*, "¿Alguien sabe qué es el número?", en *Unión*. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, núm. 19, 2009, pp. 34-46.

[32] *Cf*. Jesús Mosterín, "Introducción a: La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos'", en J. Mosterín, ed., *op. cit*., p. 223.

[33] *Idem.*

[34] Existen varias formas de caracterizar la hipótesis del continuo. A continuación ofrecemos dos versiones que son equivalentes en la teoría de conjuntos estándar. Versión 1: No existe un subconjunto de números reales de cardinalidad infinita, de tal manera que su cardinalidad sea intermedia entre el cardinal de los números reales y el cardinal de los números naturales. Versión 2: Todo buen orden que se pueda definir sobre los reales es estrictamente menor que ω_2. Para una un análisis de las versiones anteriores y sobre otras versiones véase Peter Koellner, "The Continuum Hypothesis", en Edward N. Zalta, ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy,* 2016. En https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/continuum-hypothesis/.

[35] *Cf*. K. Gödel, "Prueba de consistencia de la hipótesis generalizada del continuo", en J. Mosterín, ed., *op. cit.,* pp. 215-221.

de la axiomática de Zermelo-Fraenkel. Luego en 1963, el lógico matemático Paul Cohen demostró que no es posible derivar de los axiomas tradicionales la *hipótesis del continuo de Cantor*, con lo que se demostraba que de ZFC $\nvdash |\mathbb{R}| = \aleph_1$, con lo que HC se volvía una proposición indecidible dentro de la teoría de conjuntos. Nótese que ya no se trata de una fórmula artificialmente creada para probar la incompletitud de sistemas formales recursivos para la aritmética, como es el caso de la fórmula gödeliana que siendo verdadera es indemostrable, se trata ahora de una proposición sumamente significativa dentro de la teoría de conjuntos. Es decir, la axiomática de Zermelo-Fraenkel no tiene respuesta a la pregunta ¿qué tamaño tiene el conjunto de los números reales? Pero para Gödel tal falta de respuesta no significa que el problema haya perdido importancia, al contrario, significa que existe una falla por parte del sujeto y las teorías que éste construye. Gödel al ser un realista platónico admitía la ley del Tercero excluido y, por ende, necesariamente la conjetura de Cantor debía ser o bien verdadera o bien falsa, y si no se puede dar respuesta a esa conjetura a partir de la teoría axiomática, se debe entonces emprender la búsqueda de nuevos axiomas que nos ayuden a encontrar respuesta, y para el autor tal búsqueda debe llevarse mediante la *intuición intelectual*. Las siguientes palabras del profesor Mosterín pueden ayudarnos a entender lo que se ha dicho hasta ahora:

> Gödel pensaba que los signos del formalismo conjuntista se refieren a entidades abstractas objetivamente existentes con independencia de nuestras teorías. Por eso consideraba que la pregunta de si la hipótesis del continuo es verdadera o falsa tiene sentido en sí misma. Si los axiomas habituales de la teoría de conjuntos dejan esa pregunta sin respuesta, ello sólo significa que esos axiomas son insuficientes y que en el futuro tendrán que ser completados con nuevos axiomas que permitan decidir ésta y otras cuestiones abiertas en matemáticas.[36]

El canon es suponer que para Gödel los objetos matemáticos conforman una *realidad* a la que sólo tenemos acceso mediante la *intuición intelectual*, esta realidad es independiente de nuestros constructos teóricos, y de hecho es natural suponer que no puede ser completamente capturada por nuestras teorías y sistemas, es por ello que debemos "perfeccionar" nuestra *intuición intelectual* para proponer axiomas cada vez más potentes que tengan un mayor alcance de explicación. Ahora bien, en la famosa conferencia de Gibbs,[37] el

[36] J. Mosterín, "Introducción a: ¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", en J. Mosterín, ed., *op. cit*., p. 352.

[37] Se trata del artículo "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas", que ya previamente hemos citado.

autor propone una serie de argumentos para defender el objetivismo que no recurre a las nociones metafísicamente complicadas aludidas anteriormente. Se trata de una serie de argumentos y contra-réplicas que nos hemos atrevido a catalogar bajo el rótulo de "argumento del creador".[38] El razonamiento que defiende Gödel procede de la siguiente manera:

1) Es evidente que existen proposiciones matemáticas absolutamente indecidibles, por ejemplo la *hipótesis del continuo* que comentábamos anteriormente, y esto viene a ser respaldado por el *Teorema de incompletitud* de 1931.
2) La existencia de proposiciones matemáticas absolutamente indecidibles no es compatible con la tesis según la cual la matemática es una construcción humana, esto es, que la matemática es creada por el hombre.
3) Lo anterior se puede explicar de la siguiente manera: "el creador conoce necesariamente todas las propiedades de sus criaturas",[39] esto se debe a que lo creado (la criatura) no puede tener más que lo que el creador pone en ello.
4) De (1), (2) y (3) se infiere que los objetos matemáticos y lo hechos matemáticos deben ser objetivos, es decir, son independientes del matemático y sus teorías. Pues si la matemática fuese una creación humana, y, por lo tanto, dependiente del sujeto, no podría explicarse la existencia de proposiciones absolutamente indecidibles, es decir, el creador debería poder reconocer la verdad o falsedad de toda proposición matemática.
5) (1a. réplica) Se puede objetar al punto (4) diciendo que el creador, en este caso el matemático, no siempre puede ni debe conocer todas las propiedades de su creación, en nuestro caso la matemática. De forma más alegórica podemos decir que construimos máquinas, pero no necesariamente podemos predecir su comportamiento de antemano (Gödel está pensando aquí en el *Entscheidungsproblem*).
6) Para Gödel la réplica es sumamente débil, puesto que no creamos cosas de la nada, las máquinas que confeccionamos siempre están compuestas de partes, siempre están compuestas de algún material dado, que es independiente de nuestros diseños. Si llevamos esta idea a la matemática, es decir, que construimos ésta a partir de algún material dado, se infiere que ésta sería objetiva, pues sería independiente de nosotros.

[38] *Vid. ibid.*, pp. 120-154. El argumento no tiene en el texto de Gödel la forma sistemática y ordenada por pasos numerados que aquí proponemos.

[39] K. Gödel, "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas", en F. Rodríguez Consuegra, ed., *op. cit.*, p. 156.

7) Para reforzar el punto anterior, Gödel defiende que incluso si la matemática es una creación propia, la misma sería objetiva, puesto que el instrumento que utilizaríamos para su creación sería la *razón*, que el autor entiende como algo que radica en nosotros pero es distinto del *yo*, esto es, una especie de "maquina pensante" que habita en nosotros. De tal manera, los hechos matemáticos expresarían propiedades propias de ese instrumento, propiedades que serían objetivas.
8) (2a. réplica) Se puede objetar que el matemático ignora propiedades sobre los hechos y objetos matemáticos debido a la dificultad de los cálculos involucrados. Se trataría de un "ignorancia virtual" que desaparecería en el momento que los matemáticos obtengan una claridad plena del hecho.
9) Sin embargo, para el autor es fácil refutar la segunda réplica, puesto que es evidente que hemos llegado a conocimientos profundos de los fundamentos de la matemática que no han generado mejorías sustanciales en la solución de determinados problemas matemáticos abiertos.

No creemos que Gödel esté pensando en este razonamiento bajo cánones deductivos sino más bien de plausibilidad. Es por eso que el autor no explicita en su proceder argumentativo la conclusión a la que se llegaría desde el argumento del creador, esto es, la objetividad de la matemática. Lo que sí resulta interesante es la posibilidad de ver en dicho argumento una estrategia alterna a los razonamientos canónicos del platonismo matemático.

A modo de conclusión

Los intentos de Gödel y Frege por tratar de defender la objetividad de la matemática usando otras estrategias argumentativas, diferentes a las clásicas de corte metafísico, es una forma de no comprometerse con una epistemología oscura. Podemos ver en dichos autores una semilla de lo que después serán los intentos de naturalizar la reflexión filosófica y hacerle amigable no sólo con el quehacer científico sino también con una epistemología causal como exigía Benacerraf.

La triple distinción fregeana sobre el dominio del ser tiene una fundamentación sólida en sus investigaciones semánticas sobre el significado. La triple distinción le permite al autor refutar el punto de vista empirista y psicologista sobre el tipo de ente que resulta ser matemático, y a su vez asegura la objetividad del mismo. El problema con esta propuesta radica en la forma que adopta en los escritos póstumos del autor, pues usa la analogía de "mundo", "esfera" o "reino" para explicar esta distinción entre lo subjetivo y lo objetivo no real.

En sus póstumos, sobre todo en su artículo “El pensamiento. Una investigación lógica”, al hablarnos del mundo o esfera del pensamiento, Frege parece volver a rescatar a Platón y su teoría de las ideas.

Por otro lado, el “argumento del creador” se presenta como uno de los argumentos filosóficos más importantes de Gödel al mostrar la posibilidad de defender un realismo platónico desde resultados técnicos de la lógica-matemática. Muchos han seguido esta línea incluso para defender o refutar tesis en diversos campos filosóficos, por ejemplo, en filosofía de la mente se suele usar los resultados limitativos de Gödel para refutar posturas reduccionistas de carácter mecanicistas o computabilistas. Insistimos en que esta práctica es saludable con la ciencia, la filosofía no debe darle la espalda a la ciencia, al contrario, sus argumentaciones y tesis deben ser consistentes y motivadas con y desde la ciencia actual. Sin embargo, el autor en su “argumento del creador” asume unas nociones como *razón*, *yo* y *creación* que le restan poder a la argumentación debido a la multiplicidad de sentido que tales conceptos tienen. La tesis de que la *razón* es independiente del *yo* es difícil de sostener actualmente.

En conclusión, a pesar de las limitaciones o incluso reveses de estos intentos, creemos que se trata de un ejercicio interesante, puesto que no usar recursos como el *mundo platónico de las ideas* o la *intuición intelectual*, libran al realismo platónico de toda sombra.