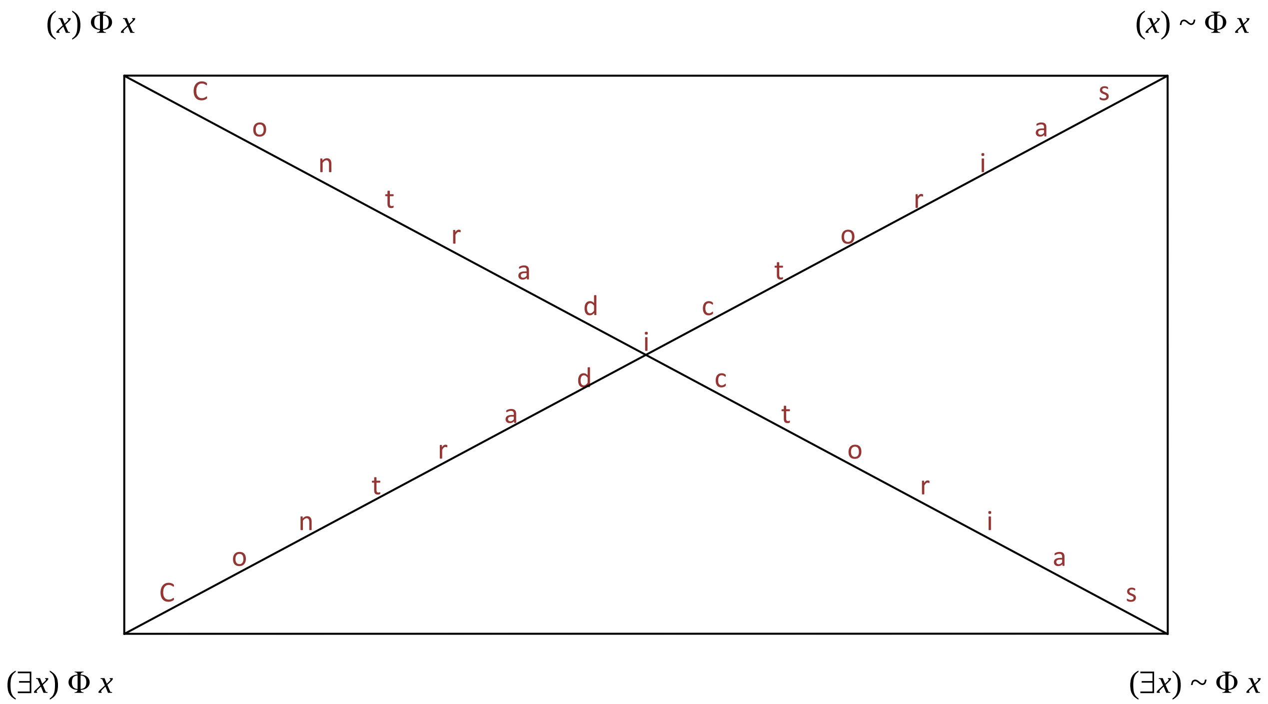
EQUIVALENCIAS LÓGICAS ENTRE PROPOSICIONES GENERALES

El Cuadrado de oposición es un esquema muy útil para ilustrar las equivalencias lógicas entre proposiciones generales. Puesto que cada proposición colocada en los vértices del cuadrado se contradice con la que ocupa el vértice opuesto, **la negación de cada una de estas proposiciones es lógicamente equivalente a la proposición que ocupe la esquina opuesta del cuadrado**.

En el siguiente cuadrado de oposición, Φ *x* representa una función cualquiera de *x*.



Las equivalencias ilustradas en este cuadrado son:

Primer grupo de equivalencias

$$\sim (x)\ \Phi\ x \ \equiv\ (\exists x) \sim \Phi\ x$$

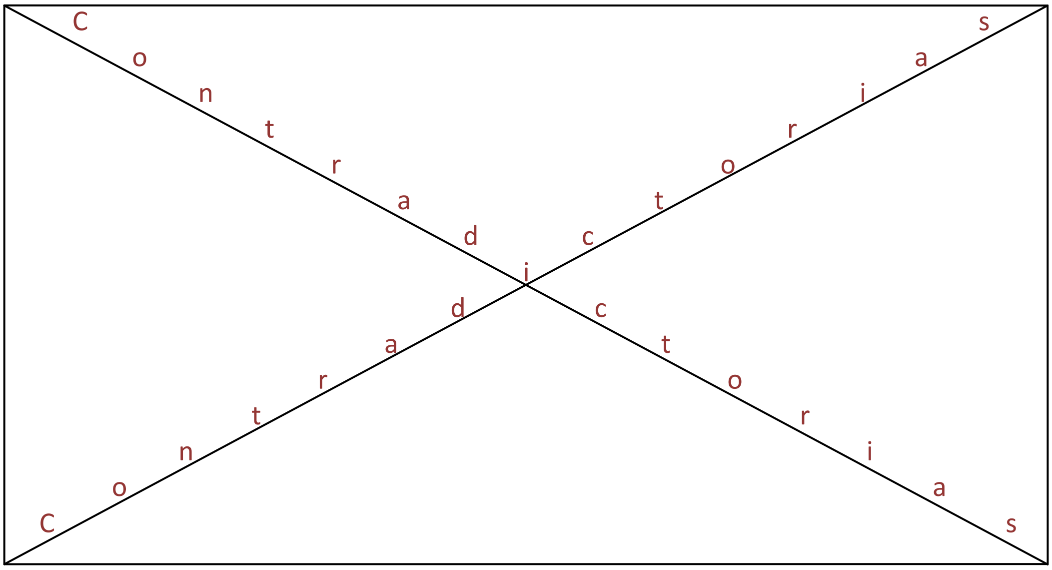
$$\sim (\exists x)\ \Phi\ x \ \equiv\ (x) \sim \Phi\ x$$

$$\sim (x) \sim \Phi\ x \ \equiv\ (\exists x)\ \Phi\ x$$

$$\sim (\exists x) \sim \Phi\ x \ \equiv\ (x)\ \Phi\ x$$

Veamos ahora otro cuadrado de oposición, en el que tengamos proposiciones un poco más complejas:

$(x)\ [\ \varphi\, x \supset \psi\, x\ ]$ $\qquad$ $(x)\ [\ \varphi\, x \supset {\sim}\, \psi\, x\ ]$



$(\exists x)\ [\ \varphi\, x \bullet \psi\, x\ ]$ $\qquad$ $(\exists x)\ [\ \varphi\, x \bullet {\sim}\, \psi\, x\ ]$

Este nuevo cuadro de oposición ilustra las siguientes equivalencias lógicas entre proposiciones:

Segundo grupo de equivalencias

$$\sim (x)\ [\ \varphi\, x \supset \psi\, x\ ]\ \equiv\ (\exists x)\ [\ \varphi\, x \bullet {\sim}\, \psi\, x\ ]$$

$$\sim (\exists x)\ [\ \varphi\, x \bullet \psi\, x\ ]\ \equiv\ (x)\ [\ \varphi\, x \supset {\sim}\, \psi\, x\ ]$$

$$\sim (x)\ [\ \varphi\, x \supset {\sim}\, \psi\, x\ ]\ \equiv\ (\exists x)\ [\ \varphi\, x \bullet \psi\, x\ ]$$

$$\sim (\exists x)\ [\ \varphi\, x \bullet {\sim}\, \psi\, x\ ]\ \equiv\ (x)\ [\ \varphi\, x \bullet \psi\, x\ ]$$

Es muy interesante hacer notar las relaciones que existen entre las equivalencias del primer grupo y las del segundo. En realidad, este segundo grupo es una consecuencia lógica del primero, tal y como se verá a continuación. Para empezar, consideremos la primera equivalencia del primer grupo

$$\sim (x)\ \Phi\, x\ \equiv\ (\exists x) \sim \Phi\, x$$

Supongamos que $\Phi\, x$ representa $\varphi\, x \supset \psi\, x$, de modo que

$$\sim (x)\ [\ \varphi\, x \supset \psi\, x\ ] \equiv (\exists x) \sim [\ \varphi\, x \supset \psi\, x\ ]$$

A continuación, por la regla Implicación material, $\sim [\, \varphi x \supset \psi x \,]$ es equivalente a $\sim \sim [\, \varphi x \bullet \sim \psi x \,]$, así

$$\sim (x)\, [\, \varphi x \supset \psi x \,] \equiv (\exists x) \sim \sim [\, \varphi x \bullet \sim \psi x \,].$$

Por último, aplicando la regla Doble negación a la fórmula $\sim \sim [\, \varphi x \bullet \sim \psi x \,]$, obtenemos

$$\sim (x)\, [\, \varphi x \supset \psi x \,] \equiv (\exists x)\, [\, \varphi x \bullet \sim \psi x \,].$$

Que es la primera equivalencia del segundo grupo. Mostraré ahora que un procedimiento similar es aplicable a la segunda equivalencia del primer grupo, que es

$$\sim (\exists x)\, \Phi x \quad \equiv \quad (x) \sim \Phi x$$

Supongamos que Φx representa, en esta ocasión, $\varphi x \bullet \psi x$, de modo que

$$\sim (\exists x)\, [\, \varphi x \bullet \psi x \,] \quad \equiv \quad (x) \sim [\, \varphi x \bullet \psi x \,]$$

Por la regla de De Morgan, $\sim [\, \varphi x \bullet \psi x \,]$ es equivalente a $\sim \varphi x \vee \sim \psi x$, por lo tanto

$$\sim (\exists x)\, [\, \varphi x \bullet \psi x \,] \quad \equiv \quad (x)\, [\, \sim \varphi x \vee \sim \psi x \,]$$

Finalmente, aplicamos la Implicación material a $\sim \varphi x \vee \sim \psi x$, para obtener $\varphi x \supset \sim \psi x$, de aquí que

$$\sim (\exists x)\, [\, \varphi x \bullet \psi x \,] \quad \equiv \quad (x)\, [\, \varphi x \supset \sim \psi x \,]$$

Ésta última es la segunda equivalencia del segundo grupo. Dejo a la curiosidad del lector el obtener a partir de la tercera y cuarta equivalencia del primer grupo, sus correspondientes del segundo grupo.